فرآیندهای تصادفی

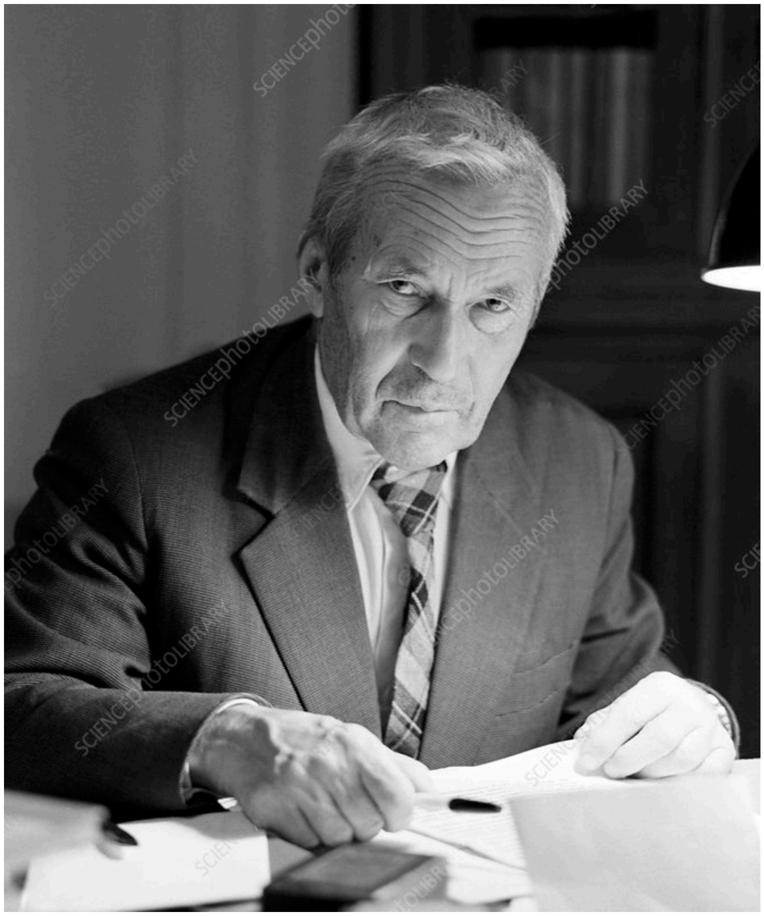
وحیدکریمی پور ـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۹ خرداد ۱۴۰۳

۱ مقدمه

یک مزرعه را در نظر بگیرید که در آن خرگوش ها به خوبی و خوشی زندگی می کنند. گاهگاهی خرگوشی زاد و ولد می کند، هر از گاهی نیز خرگوشی می میرد یا طعمه روباهی می شود. خرگوش ها محصول صیفی جات مزرع را می خورند و به بعضی از محصولات دیگر نیز اسیب می زنند. به طور دقیق نمی دانیم که در هر لحظه چه تعداد خرگوش در مزرعه زندگی می کنند، اما علاقمندیم احتمال این را که در لحظه t تعداد x تا خرگوش در مزرعه وجود داشته باشد بدانیم برای اینکه می خواهیم بدانیم وضع محصول مان در تابستان چگونه خواهد بود و برای حفاظت از ان برنامه ریزی کنیم. این احتمال را با $P(x,t)$ نشان می دهیم. این تابع نشان دهنده تغییرات یک متغیر تصادفی مثل x در طول زمان است. این متغیر تصادفی می تواند چیزی مثل همان جمعیت خرگوش ها در یک مزرعه، جمعیت مبتلایان به یک ویروس در یک جامعه، ارزش کل سهام بورس یک کشور، جمعیت یک گونه باکتری در آزمایشگاه ، تعداد مول های یک ماده در یک آزمایش شیمیایی، و یا قیمت یک ماده خام در بازارهای بین المللی و یا یکی از صدها مثال مشابه دیگر باشد. این متغیر می تواند گسسته یا پیوسته باشد. برای سادگی از این به بعد این متغیر تصادفی را پیوسته می گیریم با توجه به اینکه همه روابطی که می نویسیم برای متغیرهای گسسته نیز برقرارند. همواره نیز از مثال خرگوش های یک مزرعه حرف می زنیم با دانستن این نکته که الگویی که بدست می آوریم برای هر کدام از مثال های بالا می تواند به کار رود. خستین رابطه بهنجارش است که بر مبنای آن:

$$\int P(x_1,t_1)dx_1 = 1. \qquad (۱)$$



شکل ۱: آندره کولموگروف یکی از پیشگامان نظریه احتمال و فرایندهای تصادفی.

اگر در اول تابستان تعداد خرگوش های مزرعه x_1 تا باشد، احتمال اینکه در اواسط تابستان تعداد خرگوشها x_2 تا باشد چقدر است؟ دانستن این احتمال نیز برای برنامه ریزی و مواظبت از مزرعه مان مفید است. این احتمال را که یک احتمال شرطی است با $P(x_2, t_2|x_1, t_1)$ نشان می دهیم. می دانیم که این احتمال شرطی در رابطه زیر صدق می کند:

$$P(x_2, t_2|x_1, t_1) = \frac{P(x_2, t_2; x_1, t_1)}{P(x_1, t_1)}, \tag{۲}$$

که در آن $P(x_2, t_2; x_1, t_1)$ احتمال این است که تعداد خرگوش ها در زمان t_1 (اول تابستان) برابر با x_1 و تعداد آنها در زمان t_2 (اواسط تابستان) برابر با x_2 باشد. این تابع دو نقطه ای و در واقع توابع چند نقطه ای که تحول یک متغیر تصادفی را در طول زمان نشان می دهد می توان

برای هر نوع متغیر تصادفی تعریف کرد. شرط بهنجارش در اینجا این است که:

$$\int P(x_2,t_2;x_1,t_1)dx_2 = P(x_1,t_1) \qquad (۳)$$

و

$$\int P(x_2,t_2;x_1,t_1)dx_1 = P(x_2,t_2). \qquad (۴)$$

از این تعریف نتیجه زیر را می گیریم:

$$\int dx_2 P(x_2,t_2|x_1,t_1) = 1 \qquad (۵)$$

معنای این رابطه از نظر شهودی روشن است، چرا که بالاخره متغیر تصادفی یک مقداری را در زمان آینده اختیار خواهد کرد و مجموع کل این احتمالات می بایست برابر با یک باشد. اما دقت کنید که این بهنجارش برای مقدار بعدی متغیر تصادفی برقرار است و نه برای مقدار فعلی آن:

$$\int dx_1 P(x_2,t_2|x_1,t_1) \neq 1. \qquad (۶)$$

در حالت کلی تر آنچه که به آن علاقه داریم، تابع چند نقطه ای است یعنی اینکه متغیر تصادفی در زمان های مختلف چه مقادیری را اختیار می کند. در واقع می خواهیم بدانیم که مسیر گسسته این متغیر تصادفی در طول زمان چیست. این تابع به صورت زیر نشان داده می شود:

$$P(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\cdots x_1,t_1). \qquad (۷)$$

این تابع به صورت زیر بهنجار می شود:

$$\int P(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n_1};\cdots x_1,t_1)dx_k dx_{k-1}\cdots dx_1 = P(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\cdots x_{k+1},t_{k+1}). \qquad (۸)$$

و

$$P(x_n,t_n,\cdots x_{k+1},t_{k+1}|x_k,t_k,\cdots x_1,t_1) = \frac{P(x_n,t_n;\cdots x_1,t_1)}{P(x_k,t_k;\cdots x_1,t_1)} \qquad (۹)$$

۲ فرآیندهای مارکوف

این که جمعیت خرگوش های مزرعه در تابستان چقدر است بستگی به جمعیت خرگوش ها در اوایل بهار یعنی فصل جفت گیری آنها دارد. برای یافتن جمعیت تقریبی خرگوش ها احتیاجی نیست که جمعیت آنها را در پنج یا ده بهار قبل تر نیز بدانیم. چنین پدیده ای حافظه کوتاه مدتی دارد که حدود یک فصل است. بسیاری از پدیده های تصادفی چنین رفتاری دارند. برای چنین پدیده هایی تابع چند نقطه ای داریم:

$$P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2};\cdots x_1,t_1)=P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}) \qquad (۱۰)$$

عبارت $P(x_k,t_k|x_{k-1},t_{k-1})$ انتشارگر [۱] نامیده می شود. این عبارت نشان می دهد که از یک لحظه به لحظه بعد تابع توزیع احتمال چگونه تغییر می کند. فرض کنید که در لحظه t_1 تابع توزیع احتمال را بدانیم. در یک فرایند مارکوف می توانیم بنویسیم:

$$P(x_2,t_2;x_1,t_1)=P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1) \qquad (۱۱)$$

و از آنجا

$$P(x_2,t_2)=\int dx_1 P(x_2,t_2;x_1,t_1)=\int dx_1 P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1). \qquad (۱۲)$$

به این ترتیب می توانیم تابع توزیع احتمال را در لحظه t_2 نیز بدست آوریم. در این جا یک فرض اساسی این است که فاصله زمانی t_2-t_1 آنقدر کم است که ما می توانیم انتشارگر را تعیین کنیم. با استفاده پیاپی از خاصیت مارکوف بودن فرایند بنویسیم:

$$\begin{aligned} P(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1) &= P(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1)P(x_2,t_2;x_1,t_1) \\ &= P(x_3,t_3|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1), \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} P(x_3,t_3) &= \int dx_2dx_1 P(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1) \\ &= \int dx_2dx_1 P(x_3,t_3|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1) \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

[۱] Propagator

و با تکرار این استدلال خواهیم داشت:

$$P(x_n,t_n)=\int dx_{n-1}dx_{n-2}\cdots dx_1 P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})P(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\cdots P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1) \tag{۱۵}$$

به این ترتیب می توانیم با داشتن انتشارگر و تابع توزیع احتمال اولیه تابع توزیع را در هر لحظه حساب کنیم.

۳ فرمالیزم هامیلتونی برای فرایندهای مارکوف

فرایندهای مارکوف را می توان در چارچوبی مطالعه کرد که خیلی شبیه به مکانیک کوانتومی است و این توانایی نیز از خطی بودن معادلات مارکوف بر می خیزد. برای فهم این موضوع نمادگذاری متفاوتی را به کار می بریم که نشان دهنده کلی بودن این چارچوب باشد. نخست توجه می کنیم که فرایند مارکوف الزاما مربوط به تحول یک متغیر تصادفی نیست بلکه می تواند مربوط به تحول زمانی چندین متغیر تصادفی یا به اصطلاح یک پیکربندی یا هیئت [۲] باشد. یک پیکربندی می تواند مثلا تعداد خرگوش ها، تعداد روباه ها و تعداد بوته های کلم در یک مزرعه باشد که مجموعاً آن را با C نمایش می دهیم. زمان را نیز می توانیم گسسته در نظر بگیریم. به این ترتیب $P_n(C_k)$ احتمال این است که دستگاه ما در مرحله n ام در هیئت C_k باشد. هرگاه تعداد کل هیئت ها برابر با N باشد می توان برداری مثل بردار زیر تشکیل داد:

$$|P_n\rangle=\begin{pmatrix} P_n(C_1)\\ P_n(C_2)\\ .\\ .\\ .\\ P_n(C_N)\end{pmatrix} \tag{۱۶}$$

[۲] Configuration

که در بر دارنده احتمالات مربوط به همه هیئت ها در مرحله n ام است. این بردار را می توانیم با نمادگذاری ای که از مکانیک کوانتومی یاد گرفته ایم به صورت زیر بنویسیم:

$$|P_n\rangle = \sum_C P_n(C)|C\rangle \tag{۱۷}$$

به این ترتیب به هر هیئت C یک بردار پایه $|C\rangle$ نسبت می دهیم. این بردارها را نیز عمود بر هم انتخاب می کنیم. این بردارها یک پایه کامل برای فضای برداری ای که تعریف کرده ایم تشکیل می دهند.

$$\langle C|C'\rangle = \delta_{C,C'} \qquad \sum_C |C\rangle\langle C| = I \tag{۱۸}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\langle C|P_n\rangle = P_n(C) \tag{۱۹}$$

با این نمادگذاری بهنجارش احتمالات به این صورت بیان می شود:

$$\sum_C P_n(C) = 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_C \langle C|P_n\rangle = 1 \quad \longrightarrow \quad \langle S|P_n\rangle = 1, \tag{۲۰}$$

که در آن حالت $|S\rangle$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$\langle S| = \sum_C \langle C|. \tag{۲۱}$$

حال می توانیم به معادله اصلی تحول مارکوفی نگاه کنیم که به صورت زیر نوشته می شود:

$$P_{n+1}(C) = \sum_{C'} P(C, n+1|C', n)P_n(C') \tag{۲۲}$$

می توانیم ماتریس Q را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Q_n(C, C') := P(C, n+1|C', n) \tag{۲۳}$$

به این ترتیب می توان عملگری مثل Q نیز تعریف کرد که $Q_n(C, C')$ درایه های این عملگرباشد:

$$Q_n(C, C') =: \langle C|\hat{Q}_n|C'\rangle \tag{۲۴}$$

این ماتریس خاصیت های زیر را دارد:

$$Q_n(C,C') \geq 0 \qquad \sum_C Q_n(C,C') = 1 \tag{۲۵}$$

که به صورت عملگری به شکل زیر بیان می شود:

$$\langle S|\hat{Q} = \langle S|. \tag{۲۶}$$

با این تعاریف و این نمادگذاری معادله تحول مارکوفی به شکل زیر نوشته می شود

$$\langle C|P_{n+1}\rangle = \sum_{C'} \langle C|\hat{Q}_n|C'\rangle\langle C'|P_n\rangle. \tag{۲۷}$$

پس از برداشتن $\langle C|$ از طرفین به رابطه زیر می رسیم که معادله تحول مارکوفی به شکل زیر نوشته می شود:

$$|P_{n+1}\rangle = \hat{Q}_n|P_n\rangle \tag{۲۸}$$

چنانچه عملگر تحول Q_n مستقل از زمان باشد یعنی به n بستگی نداشته باشد، می توان بردار حالت $|P_n\rangle$ را به صورت زیر نوشت:

$$|P_n\rangle = (\hat{Q})^n|P_0\rangle. \tag{۲۹}$$

این معادله شبیه معادله تحول حالت در مکانیک کوانتومی است که در آن Q نقش عملگر تحول را بازی می کند. تنها تفاوت این است که عملگر Q یکانی نیست. این یکانی نبودن نیز ناشی از این است که بهنجارش بردار $|P\rangle$ با آنچه که در مکانیک کوانتومی می شناسیم متفاوت است. یکانی بودن عملگر تحول جای خود را به رابطه (۲۶) داده است. برای حل این رابطه به همان شیوه ای عمل می کنیم که از مکانیک کوانتومی آموخته ایم، یعنی نخست طیف عملگر تحول را پیدا می کنیم: البته این عملگر چون یکانی نیست، ویژه بردارهای راست و چپ آن با هم متفاوتند:

$$\hat{Q}|\lambda_\alpha\rangle = \lambda_\alpha|\lambda_\alpha\rangle \tag{۳۰}$$

$$\langle\lambda_\alpha|\hat{Q} = \lambda_\alpha\langle\lambda_\alpha| \tag{۳۱}$$

البته چپ و راست بودن تنها برای ویژه بردارها معنا دارد و ویژه مقدارها، با توجه به اینکه از رابطه $det(Q-\lambda I) = 0$ بدست می آیند، دارای چنین ویژگی ای نیستند. ویژه بردارهای چپ و راست بر هم عمودند و یک پایه کامل تشکیل می دهند:

$$\langle\lambda_\alpha|\lambda_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta} \tag{۳۲}$$

$$\sum_\alpha |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha| = I \tag{۳۳}$$

به این ترتیب عملگر Q را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\hat{Q} = \sum_\alpha \lambda_\alpha |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha| \tag{۳۴}$$

که در نتیجه آن خواهیم داشت

$$\hat{Q}^n = \sum_\alpha {\lambda_\alpha}^n |\lambda_\alpha\rangle\lambda_\alpha| \tag{۳۵}$$

و در نتیجه بردار احتمال در لحظه n به صورت زیر یافته می شود:

$$|P_n\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha^n |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|P_0\rangle. \tag{۳۶}$$

این رابطه نشان می دهد که چگونه با در دست داشتن احتمالات در اولین مرحله می توان بردار احتمال را در هر مرحله زمانی دیگری تعیین کرد. قبل از مطالعه یک مثال لازم است برخی از خواص کلی این نوع عملگرها را مطالعه کنیم. نخست به یک تعریف می پردازیم:

- **تعریف:** یک ماتریس Q یک ماتریس استوکاستیک نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

  الف: همه درآیه های آن مثبت باشند.

  ب: مجموع همه عناصر روی هر ستون آن برابر با یک باشد.

- **قضیه:** یک ماتریس استوکاستیک Q دارای این خاصیت است که

  الف: حتما یک ویژه مقدار برابر با یک دارد.

  ب: اندازه همه ویژه مقدارهای آن مساوی یا کمتر از یک است.

  پ: به ازای هر ویژه مقدار λ یک ویژه مقدار λ^* نیزدارد.

ت: ویژه بردارهای چپ و راست متناظر با ویژه مقدارهای متفاوت بر هم عمودند و یک پایه کامل تشکیل می دهند. این ویژه بردارها را می توان بهنجار نیز کرد. دقت کنید که ویژه بردارهای راست لزوما بر هم عمود نیستند (همین طور ویژه بردارهای چپ). در واقع اگر ویژه بردارهای راست را با $|\lambda\rangle$ و ویژه بردارهای چپ را با $\langle\lambda|$ نشان دهیم، داریم

$$\langle\lambda|\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}, \qquad \sum_{\lambda} |\lambda\rangle\langle\lambda| = I. \tag{۳۷}$$

- **اثبات:** الف: از آنجا که ماتریس Q در شرط $\langle S|Q = \langle S|$ صدق می کند، می فهمیم که حتما یک ویژه مقدار یک وجود دارد. در واقع بردار $\langle S|$ ویژه بردار چپ وابسته به این ویژه مقدار یک است. اما باید توجه کنید که بردار $|S\rangle$ الزاما ویژه بردار راست ماتریس Q نیست. در واقع همه هدف ما در مطالعه یک فرایند مارکوفی پیدا کردن این ویژه بردار است، چرا که همین ویژه بردار است که حالت پایای فرآیند را تعیین می کند.

ب: یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار راست مربوط به آن را در نظر می گیریم:

$$Q\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{۳۸}$$

که برحسب مولفه ها خواهد شد

$$\sum_j Q_{ij}x_j = \lambda x_i \tag{۳۹}$$

قدر مطلق طرفین را حساب می کنیم، از مثبت بودن درایه های ماتریس Q و بعد از نامساوی مثلث استفاده می کنیم:

$$|\sum_j Q_{ij}x_j| = |\lambda||x_i| \qquad \forall\, i \quad \longrightarrow \tag{۴۰}$$

$$|\lambda||x_i| \le \sum_j Q_{ij}|x_j| \qquad \forall\, i \quad \longrightarrow \tag{۴۱}$$

حال روی اندیس i در هر دو طرف جمع می بندیم و از این استفاده می کنیم که $\sum_i Q_{ij} = 1$ است و به رابطه زیر می رسیم:

$$|\lambda|\sum_i |x_i| \le \sum_{i,j} Q_{ij}|x_j| = \sum_j |x_j| \tag{۴۲}$$

که به رابطه $|\lambda| \le 1 \longrightarrow$ و اثبات قضیه می انجامد.

پ: یک ویژه مقدار از این ماتریس مثل λ را در نظر می گیریم. برای این ویژه مقدار داریم:

$$Qx = \lambda x. \tag{۴۳}$$

از آنجا که ماتریس Q حقیقی است، نتیجه می گیریم که رابطه زیر نیز برقرار است:

$$Qx^* = \lambda^* x^*. \tag{۴۴}$$

بنابراین ویژه مقادیر این ماتریس یا حقیقی اند یا اگر مختلط باشند به صورت جفت های مزدوج ظاهر می شوند و ویژه بردارهای مربوطه نیز مزدوج مختلط یکدیگرند.

ت: یک ویژه بردار راست و یک ویژه بردار چپ را در نظر بگیرید:

$$Q|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \qquad \langle\mu|Q = \mu\langle\mu|. \tag{۴۵}$$

حال با ضرب رابطه اول از سمت چپ در $\langle\mu|$ و رابطه دوم از سمت راست در $|\lambda\rangle$ و کم کردن دو رابطه از هم می رسیم به:

$$0 = \langle\mu|Q|\lambda\rangle - \langle\mu|Q|\lambda\rangle = (\lambda - \mu)\langle\mu|\lambda\rangle. \tag{۴۶}$$

که به این معناست که اگر $\mu \neq \lambda$ باشد، آنگاه $\langle\mu|\lambda\rangle = 0$. برای وقتی که $\lambda - \mu = 0$ است دیگر $\langle\mu|\lambda\rangle$ مساوی صفر نیست و می توانیم آنها را بهنجار کنیم. در نتیجه این ویژه بردارها دارای خاصیت زیر هستند:

$$\langle\mu|\lambda\rangle = \delta_{\mu,\lambda}. \tag{۴۷}$$

باقی مانده است که ثابت کنیم این ویژه بردارها یک پایه کامل تشکیل می دهند. به جای یک اثبات کامل و دقیق سعی می کنیم کمی بحث کنیم. ماتریسی مثل ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{۴۸}$$

این ماتریس یک ویژه مقدار $\lambda = 1$ دارد و وابسته به این ویژه مقدار تنها یک ویژه بردار دارد. بنابراین ویژه بردارهای این ماتریس یک پایه برای فضا تشکیل نمی دهند. چنین ماتریسی هایی ماتریس های از نوع جوردن [۳] نامیده می شوند. البته ماتریس های بزرگتر می توانند

[۳] Jordan Form

بلوک های جوردنی داشته باشند و به همین دلیل قطری پذیر نباشند، مثل ماتریس زیر

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{۴۹}$$

اما واضح است که ماتریس Q نمی تواند از این نوع باشد چرا که چنین فرمی با تعاریف ماتریس تصادفی منافات دارد (چرا چنین است؟) بنابراین ویژه بردارهای راست یا چپ هرکدام می توانند پایه ای برای فضای برداری احتمالات تشکیل دهند. وقتی که چنین شد کافی است یک بردار احتمال دلخواه را بر حسب یکی از این پایه ها بسط دهیم و از رابطه (۴۷) استفاده کنیم:

$$|P\rangle = \sum_\lambda P(\lambda)|\lambda\rangle \tag{۵۰}$$

حال طرفین را در $\langle\mu|$ ضرب می کنیم و بدست می آوریم:

$$\langle\mu|P\rangle = \sum_\lambda P(\lambda)\langle\mu|\lambda\rangle = \sum_\lambda P(\lambda)\delta_{\lambda,\mu} = P(\mu) \tag{۵۱}$$

و در نتیجه

$$|P\rangle = \sum_\lambda \langle\lambda|P\rangle|\lambda\rangle = \sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|P\rangle. \tag{۵۲}$$

از آنجا که این رابطه برای هر برداری صادق است به رابطه کامل بودن می رسیم:

$$\sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| = I. \tag{۵۳}$$

- تمرین: (موعد تحویل: ۲۵ اسفندماه ۱۳۹۸، ساعت شش عصر) دو جعبه A و B در نظر می گیریم. در ابتدا جعبه A حاوی دو توپ و جعبه B حاوی سه توپ است. حال در هر مرحله به طور تصادفی یک توپ از هر کدام از جعبه ها بر می داریم و جای آنها را عوض می کنیم و دوباره به جعبه ها بر می گردانیم. پس از n مرحله احتمال اینکه در جعبه B k تا توپ سبز وجود داشته باشد چقدر است؟

- تمرین: (موعد تحویل: ۲۵ اسفندماه ۱۳۹۸، ساعت شش عصر) سه پسر در روی یک دایره ایستاده اند. پسرهای را با علامت های $A,\ B,\ C$ مشخص می کنیم. B در سمت راست A و C در سمت راست B ایستاده است. این سه پسر یک بازی با توپ انجام می دهند به این ترتیب که در دور اول توپ در دست A است. هرکدام از این سه پسر که توپ را در دست دارد سکه اش را می اندازد و بنابر نتیجه

شکل ۲: مثالی از یک فرایند استوکاستیک: هر بار به طور تصادفی از هر کدام از جعبه ها یک توپ برمی داریم و جای آنها را عوض می کنیم و به جعبه ها بر می گردانیم. احتمال اینکه در بار n تعداد k تا توپ سبز در جعبه سمت راست باشد چقدر است؟

سکه توپ را به پسر سمت راست خود (در صورتی که نتیجه شیر باشد) یا به پسر سمت چپ خود (در صورتی که نتیجه خط باشد) می دهد. احتمالات سکه هایی که این پسرها در دست دارند به شکل زیر است:

$$A : p = 1/2, \quad q = 1/2; \qquad B : p = 1, \quad q = 0 \qquad C : p = 3/4, \quad q = 1/4. \tag{۵۴}$$

p احتمال خط آمدن و q احتمال شیرآمدن سکه است. اگر این پسر ها تعداد دورهای خیلی زیادی بازی کنند:

الف: به طور متوسط هر کدام از پسرها در چه درصدی از دورها صاحب توپ هستند؟

ب: احتمال اینکه A پس از سه دور صاحب توپ شود چقدر است؟

پ: احتمال اینکه B تا انتهای دور سوم هنوز صاحب توپ نشده باشد چقدر است؟

د: احتمال اینکه A در دور s ام صاحب توپ شود (مستقل از اینکه در دورهای قبلی صاحب توپ شده باشد یا نه) چقدر است؟

۴ فرایند مارکوف در زمان پیوسته

فرایند های مارکوف را در زمان پیوسته نیز می توان صورت بندی کرد. برای این کار فرض می کنیم هر مرحله از فرایند گسسته مدت زمان کوچک ϵ طول بکشد. در این صورت زمان مرحله n ام عبارت است از $t = n\epsilon$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$n\epsilon = t \qquad (n+1)\epsilon = t+\epsilon \qquad P_n(C) = P_t(C) \tag{۵۵}$$

احتمالات شرطی نیز به صورت زیر در می آیند:

$$P(C, n+1|C', n) = P(C, t+\epsilon|C', t) \tag{۵۶}$$

حال دقت می کنیم که اگر دو هیئت C و C' با هم متفاوت باشند، این احتمال شرطی در حد $\epsilon \longrightarrow 0$ می بایست به سمت صفر میل کند، بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$P(C, t+\epsilon|C', t) \approx \epsilon W(C, C'; t) \qquad if \quad C \neq C' \tag{۵۷}$$

که در آن $W(C, C'; t)$ نرخ گذار از حالت C' به حالت C است. دقت کنید که نرخ گذار بعد معکوس زمان دارد. در نتیجه احتمال باقی ماندن در یک هیئت به صورت زیر درمی آید:

$$P(C, t+\epsilon|C, t) = 1 - \sum_{C' \neq C} P(C', t+\epsilon|C, t) = 1 - \epsilon \sum_{C' \neq C} W(C', C; t). \tag{۵۸}$$

حال می توانیم معادله تحول مارکوفی را بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} P(C, t+\epsilon) &= \sum_{C'} P(C, t+\epsilon|C', t) P(C', t) \\ &= \sum_{C' \neq C} P(C, t+\epsilon|C', t) P(C', t) + P(C, t+\epsilon|C, t) P(C, t) \\ &= \epsilon \sum_{C' \neq C} W(C, C'; t) P(C', t) + P(C, t)\big[1 - \epsilon \sum_{C' \neq C} W(C', C; t)\big] \end{aligned} \tag{۵۹}$$

پس از بازنویسی رابطه بالا به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{dP(C,t)}{dt} = \sum_{C' \neq C} P(C', t) W(C, C'; t) - P(C, t)\big[\sum_{C' \neq C} W(C', C; t)\big] \tag{۶۰}$$

که معمولا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{dP(C,t)}{dt} = \sum_{C' \neq C} P(C',t)W(C,C';t) - P(C,t)W(C',C;t). \quad (۶۱)$$

حال دقت می کنیم که اگر قید $C' \neq C$ را از روی جمع برداریم بازهم معادله صحیح است چرا که به طرف راست معادله مقدار صفر را اضافه کرده ایم. بنابراین معادله تحول مارکوفی در زمان پیوسته به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{dP(C,t)}{dt} = \sum_{C'} P(C',t)W(C,C';t) - P(C,t)W(C',C;t). \quad (۶۲)$$

می توان این معادله را نیز به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt}\langle C|P\rangle = -\sum_{C'}\langle C|H|C'\rangle\langle C'|P\rangle \quad (۶۳)$$

که در آن

$$\langle C|H|C'\rangle = \delta_{C,C'}\sum_{C"} W(C",C;t) - W(C,C';t). \quad (۶۴)$$

■ تمرین: این رابطه را ثابت کنید.

ماتریس H تنها برای راحتی با علامت منفی تعریف شده . دلیل این راحتی بعدا توضیح داده خواهد شد. به این ترتیب رابطه تحول مارکوفی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d}{dt}|P\rangle = -H|P\rangle. \quad (۶۵)$$

این معادله شبیه معادله شرودینگر است با چند تفاوت مهم: نخست اینکه H هرمیتی نیست و حقیقی است. هم چنین i در این معادله وجود ندارد. به جای هرمیتی بودن، ماتریس H که در این جا بازهم آن را هامیلتونی می نامیم، دارای دو خاصیت ویژه است:

یک: اینکه عناصر غیرقطری اش همه منفی هستند ،

دو: مجموع عناصر هر ستون آن برابر با صفر است.

■ تمرین: با استفاده از (۶۴) نشان دهید که این دو خاصیت برقرارند. هم چنین نشان دهید که این هامیلتونی خاصیت زیر را دارد»

$$\langle S|H = 0 \qquad (۶۶)$$

برای حل کردن این معادله نیز نیازمند طیف هامیلتونی هستیم: ویژه بردارهای راست هامیلتونی را در نظر می گیریم

$$H|\lambda_k\rangle = \lambda_k|\lambda_k\rangle. \qquad (۶۷)$$

و بعد برای هامیلتونی های مستقل از زمان خواهیم داشت:

$$|P(t)\rangle = e^{-Ht}|P(0)\rangle = \sum_k e^{-\lambda_k t}|\lambda_k\rangle\langle\lambda_k|P(0)\rangle. \qquad (۶۸)$$

برای هامیلتونی های وابسته به زمان نیز عملگر e^{-Ht} با عملگر مرتب شده زمانی [۴]

$$U(t) = T\, e^{-\int_0^t H(t')dt'} \qquad (۶۹)$$

جایگزین خواهد شد. برای سادگی به حالت مستقل از زمان توجه می کنیم. معمولا علاقمند به حالت پایای یک فرایند مارکوف هستیم [۵]. حالت پایه حالتی است که فرایند در زمان بی نهایت به آن می رسد. در این حد رابطه (۶۸) نشان می دهد که فقط پایین ترین ویژه مقدار هامیلتونی باقی می ماند . چنانچه حالت پایه هامیلتونی غیرواگن باشد، این حالت همان حالت پایا خواهد بود. یعنی در درازمدت هر نوع حالت اولیه به سمت حالت پایه هامیلتونی میل خواهد کرد و حالت پایا ربطی به حالت اولیه ندارد. اما اگر حالت پایه هامیلتونی واگنی داشته باشد، آنگاه حالت پایا ترکیبی خطی از این حالت های پایه خواهد بود و ضرایب ترکیب خطی را حالت اولیه تعیین خواهد کرد.

■ در این جا به یک نکته مهم باید اشاره کنیم و آن اینکه هامیلتونی H معمولا هرمیتی نیست و به همین مناسبت ویژه مقدارهای آن نیز حقیقی نیستند که بتوان برای آنها ترتیب قایل شد. بنابراین باید روشن کنیم که چرا از لفظ حالت پایه صحبت می کنیم. نکته این است که ما ثابت کردیم ویژه مقدارهای Q اندازه شان همه از یک کوچکتر است و حتما یک ویژه مقدار یک هم دارند. می دانیم که رابطه هامیلتونی و عملگر Q که تحول در زمان محدود را به دست می دهد، از نوع $Q = e^{-H}$ است. بنابراین ویژه مقدارهای Q و ویژه مقدارهای H به صورت زیر به هم مربوط اند:

$$\lambda(Q) = e^{-\lambda(H)}. \qquad (۷۰)$$

[۴] Time Ordered

[۵] Steady State

در نتیجه با توجه به خواص طیف Q می توانیم بگوییم که H حتما یک ویژه مقدار صفر دارد و همه ویژه مقدارهایش نیز قسمت حقیقی شان مثبت است. به این معنی است که صحبت از حالت پایه می کنیم. یعنی می توانیم حالت ها را بر اساس قسمت حقیقی شان مرتب کنیم و حالت پایه در این رتبه بندی واقعا پایین ترین حالت است.

$$\lambda(H) = 0 \tag{۷۱}$$

۵ محاسبه متوسط ها در صورت بندی هامیلتونی

در صورت بندی هامیلتونی برای فرآیندهای مارکوفی می توانیم متوسط ها را به شکلی محاسبه کنیم که بازهم شباهت ظاهری با مکانیک کوانتومی داشته باشد. البته تاکید می کنیم که این شباهت ها فقط ظاهری است و مفهومی نیست. این کار را می توان هم برای زمان گسسته و هم زمان گسسته انجام داد. در اینجا برای زمان پیوسته و برای وقتی که هامیلتونی مستقل از زمان است انجام می دهیم. با تغییرات اندکی خواننده می تواند آن را برای زمان گسسته نیز صورت بندی کند.

فرض کنید که می خواهیم متوسط کمیتی مثل $A(C)$ را محاسبه کنیم. این کمیت تابعی از هیئت C است. می نویسم:

$$\langle A(t)\rangle = \sum_C A(C)P(C,t) = \sum_C A(C)\langle C|P(t)\rangle \tag{۷۲}$$

حال کافی است که یک عملگر $\hat{A}$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\hat{A} = \sum_C A(C)|C\rangle\langle C|. \tag{۷۳}$$

در نتیجه رابطه قبلی را به صورت زیر می نویسیم:

$$\langle A(t)\rangle = \sum_C A(C)\langle C|P(t)\rangle = \sum_C \langle C\langle\hat{A}|P(t)\rangle = \langle S|\hat{A}|P(t)\rangle. \tag{۷۴}$$

به این ترتیب محاسبه این متوسط تبدیل می شود به محاسبه عنصر ماتریسی یک عملگر. اما این عنصر ماتریسی بین $\langle S|$ و $|P(t)\rangle$ است. به طور کلی این بردار $\langle S|$ نقش خیلی مهمی در همه محاسبات مربوط به فرایندهای مارکوف ایفا می کند. می توانیم این عنصر ماتریسی را به شکلی بنویسیم

که تشابه اش با صورت بندی مکانیک کوانتومی بیشتر شود. از این استفاده می کنیم که

$$|P(t)\rangle = e^{-Ht}|P(0)\rangle \tag{۷۵}$$

و

$$\langle S|e^{Ht} = \langle S|. \tag{۷۶}$$

در نتیجه متوسط را به شکل زیر می نویسیم:

$$\langle A(t)\rangle \equiv \langle S|\hat{A}|P(t)\rangle = \langle S|e^{Ht}\hat{A}e^{-Ht}|P(0)\rangle =: \langle S|\hat{A}_H(t)|P(0)\rangle. \tag{۷۷}$$

در طرف راست این معادله عملگر شبه هاینبرگی

$$\hat{A}_H(t) := e^{Ht}\hat{A}e^{-Ht}$$

را تعریف کرده ایم که محاسبه آن بین حالت اولیه $|P(0)\rangle$ و حالت مرجع $\langle S|$ مقدار متوسط کمیت A را بدست می دهد.

می توانیم توابع دو نقطه ای را نیز به همین ترتیب محاسبه کنیم. فرض کنید در طول یک فرایند مارکوف می خواهیم متوسط زیر را حساب کنیم:

$$\langle B(t_2)A(t_1)\rangle := \sum_{C_2,C_1} B(C_2)A(C_1)P(C_2,t_2;C_1,t_1) \tag{۷۸}$$

قبل از محاسبه بیشتر می بایست معنای این عبارت را بفهمیم. احتمال نوشته شده در واقع احتمال این است که در لحظه t_1 هیئت C_1 و در لحظه t_2 هیئت C_2 اختیار شود. سپس متوسط کمیت های A و B در این دو زمان محاسبه شده است. این کمیت نشان دهنده همبستگی این دو کمیت در این دو لحظه بخصوص است. هم چنین می دانیم که ترتیب زمان ها به این گونه است:

$$t_2 \geq t_1. \tag{۷۹}$$

با توجه به این که این فرایند یک فرایند مارکوف است می نویسیم:

$$\langle B(t_2)A(t_1)\rangle := \sum_{C_2,C_1} B(C_2)A(C_1)P(C_2,t_2|C_1,t_1)P(C_1,t_1) \tag{۸۰}$$

عبارت $P(C_2, t_2|C_1, t_1)$ احتمال شرطی این است که اگر سیستم در زمان t_1 در حالت C_1 باشد، با چه احتمالی در زمان t_2 در حالت C_2 است. این احتمال بنابراست با:

$$\langle C_2|Q(t_2 - t_1)|C_1\rangle = \langle C_2|e^{-(t_2-t_1)H}|C_1\rangle. \tag{۸۱}$$

حال به همان روشی که در مورد تابع یک نقطه ای دیدیم عمل می کنیم و متوسط دو نقطه ای را بازنویسی می کنیم. خود روابط گویا هستند که چگونه از یک رابطه به یک رابطه دیگر رسیده ایم:

$$\begin{aligned}
\langle B(t_2)A(t_1)\rangle &:= \sum_{C_2,C_1} B(C_2)A(C_1)P(C_2,t_2|C_1,t_1)P(C_1,t_1) \\
&= \sum_{C_2,C_1} B(C_2)A(C_1)\langle C_2|e^{-(t_2-t_1)H}|C_1\rangle\langle C_1|P(t_1)\rangle \\
&= \sum_{C_2,C_1} \langle C_2|B(C_2)e^{-(t_2-t_1)H}|C_1\rangle\langle C_1|A(C_1)|P(t_1)\rangle \\
&= \sum_{C_2}\langle C_2|\hat{B}e^{-(t_2-t_1)H}\hat{A}|P(t_1)\rangle \\
&= \langle S|\hat{B}e^{-t_2H}e^{t_1H}\hat{A}|P(t_1)\rangle \\
&= \langle S|\hat{B}e^{-t_2H}e^{t_1H}\hat{A}e^{t_1H}|P(0)\rangle \\
&= \langle S|e^{t_2H}\hat{B}e^{-t_2H}e^{t_1H}\hat{A}e^{t_1H}|P(0)\rangle \\
&= \langle S|\hat{B}_H(t_2)\hat{A}_H(t_1)P(0)\rangle. \qquad (۸۲)
\end{aligned}$$

به این ترتیب تابع دو نقطه ای و هر تابع چند نقطه ای را نیز می توان به صورت عنصر ماتریسی حاصلضرب عملگرهای شبه هایزنبرگ نوشت.

۶ ولگشت

یکی از مهم ترین و پرکاربردترین فرایندهای مارکوف، ولگشت یا گشت تصادفی [۶] است. در شکل داستانی اش این گونه است که فردی را در نظر می گیریم که در هر قدم با احتمال p یک گام به سمت راست و با احتمال q یک گام به سمت چپ برمی دارد. و با احتمال r نیز سر جای خود

[۶] Random Walk

می ماند. می خواهیم بدانیم اگر در ابتدا در مبداء بوده است، در قدم N ام با چه احتمالی در یک فاصله معین است. معادله تحول مارکوفی برای این فرآیند به شکل زیر نوشته می شود:

$$P_N(x) = pP_{N-1}(x-1) + qP_{N-1}(x+1) + rP_{N-1}(x) \tag{۸۳}$$

برای حل این معادله تحول یک تابع مولد به شکل زیر تعریف می کنیم. این یک روش معمول برای حل این گونه معادلات است:

$$Z_N(s) = \sum_x e^{sx} P_N(x). \tag{۸۴}$$

معمولا محاسبه تابع تولد کار ساده ای است و از روی تابع مولد می توان اطلاعات کاملی در باره تابع توزیع احتمال بدست آورد. به عنوان مثال از تعریف بالا می فهمیم که:

$$\begin{aligned} &Z_N(0) = 1 \\ &\frac{dZ_N}{ds}(s=0) = \langle X \rangle \\ &\frac{d^2 Z_N}{ds^2}(s=0) = \langle X^2 \rangle \\ &\frac{d^k Z_N}{ds^k}(s=0) = \langle X^k \rangle. \end{aligned} \tag{۸۵}$$

از روی معادله تحول مارکوفی می فهمیم که این تابع مولد در رابطه زیر صدق می کند:

$$Z_N(s) = (pe^s + qe^{-s} + r) Z_{N-1}(s) \tag{۸۶}$$

تکرار این رابطه منجر می شود به:

$$Z_N(s) = (pe^s + qe^{-s} + r)^N Z_0(s) \tag{۸۷}$$

حال باید تابع مولد ابتدایی را حساب کرد. با توجه به اینکه در ابتدا فرد با قطعیت در مبداء مختصات است داریم:

$$P_0(x) = \delta_{0,x} \tag{۸۸}$$

و در نتیجه

$$Z_0(s) = \sum_x e^{sx} \delta_{x,0} = 1. \tag{۸۹}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Z_N(s) = (pe^s + qe^{-s} + r)^N. \tag{۹۰}$$

حال از روی این تابع مولد می توانیم بفهمیم:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= N(p-q) \\ \langle X^2 \rangle &= N(N-1)(p-q)^2 + N, \end{aligned} \tag{۹۱}$$

که از آن بدست می آوریم:

$$\sigma_X^2 := \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 4Npq. \tag{۹۲}$$

۱.۶ ولگشت یک بعدی در زمان پیوسته

فرآیند ولگشت را در زمان پیوسته نیز می توانیم بررسی کنیم. ذره ای را در نظر بگیرید که با نرخ احتمال μ یک قدم رو به جلو برمی دارد و با نرخ احتمال λ یک قدم به عقب می رود. معنای این حرف این است که در فاصله زمانی بسیار کوتاه dt این ذره با احتمال μdt یک قدم به جلو می رود (یا این درصد از ذرات به جلو می روند) و با احتمال λdt یک قدم به عقب می رود (یا این درصد از ذرات به عقب می روند). طبیعتا با احتمال $1 - \lambda dt - \mu dt$ نیز ذرات حرکت نمی کنند و سر جای خود باقی می مانند. در این صورت معادله فرایند مارکوف به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \mu P(x-1,t) + \lambda P(x+1,t) - (\mu+\lambda) P(x,t). \tag{۹۳}$$

هم می توانیم این معادله را مستقیما حل کنیم و $P(x,t)$ را بدست آوریم و هم می توانیم نخست معادله ای برای تحول مقادیر متوسط بدست آورده و آنها را حل کنیم. معمولا هم در هر نوع تحول مارکوفی بیشتر علاقمندیم بدانیم متوسط کمیت ها چه نوع دینامیکی دارند. اگر به این دومی علاقه داشته باشیم می نویسم:

$$\langle X(t) \rangle = \sum_x x P(x,t) \tag{۹۴}$$

و با استفاده از معادله تحول مارکوفی

$$\frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle = \mu \sum_x x P(x-1,t) + \lambda \sum_x x P(x+1,t) - (\lambda+\mu) \sum_x x P(x,t) \tag{۹۵}$$

از آنجا که جمع روی همه مقادیر x است می توانیم طرف راست را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{d}{dt}\langle X(t)\rangle = \mu\sum_x (x-1+1)P(x-1,t) + \lambda\sum_x (x+1-1)P(x+1,t) - (\lambda+\mu)\sum_x xP(x,t) \qquad (۹۶)$$

و در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\langle X(t)\rangle = \mu(\langle X(t)\rangle + 1) + \lambda(\langle X(t)\rangle - 1) - (\lambda+\mu)\langle X(t)\rangle = \mu - \lambda. \qquad (۹۷)$$

بنابراین تحول این مقدار متوسط خطی است و خواهیم داشت:

$$\langle X(t)\rangle = (\mu-\lambda)t. \qquad (۹۸)$$

با توجه به تعریف ولگشت این نتیجه مورد انتظار هم هست. حال به همین شیوه تحول ممان دوم را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle X^2(t)\rangle &= \sum_x \mu x^2 P(x-1,t) + \sum_x \lambda x^2 P(x+1,t) - (\mu+\lambda)\sum_x \mu x^2 P(x,t)\\
&= \sum_x \mu(x-1+1)^2 P(x-1,t) + \sum_x \lambda(x+1-1)^2 P(x+1,t) - (\mu+\lambda)\sum_x \mu x^2 P(x,t)\\
&= \mu(\langle X^2(t)\rangle + 2\langle X(t)\rangle + 1) + \lambda(\langle X^2(t)\rangle - 2\langle X(t)\rangle + 1) - (\lambda+\mu)\langle X^2(t)\rangle = \mu - \lambda\\
&= 2(\mu-\lambda)\langle X(t)\rangle + (\mu+\lambda). \qquad (۹۹)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\langle X(t)\rangle = (\mu-\lambda)t$ این معادله براحتی حل می شود. حل آن عبارت است از:

$$\langle X^2(t)\rangle = (\mu-\lambda)^2 t^2 + (\lambda+\mu)t, \qquad (۱۰۰)$$

که در آن شرایط اولیه $\langle X^2(0)\rangle = 0$ را در نظر گرفته ایم. از این روابط بدست می آوریم:

$$\sigma_X(t) = (\mu+\lambda)t \qquad (۱۰۱)$$

که نشان می دهد واریانس به صورت خطی رشد می کند.

می توان تحول تابع مولد را نیز از روی معادله تحول مارکوفی بدست آورد. با توجه به این که

$$Z(s,t) = \sum_x s^x P(x,t) \qquad (۱۰۲)$$

و استفاده از معادله تحول مارکوفی، بدست می آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(s,t)=\left(\mu s+\lambda s^{-1}-\mu-\lambda\right)Z(s,t), \tag{۱۰۳}$$

و از آنجا

$$Z(s,t)=e^{\left(\mu s+\lambda s^{-1}-\mu-\lambda\right)t}Z(s,0). \tag{۱۰۴}$$

اگر در لحظه صفر داشته باشیم $P(x,0)=\delta_{x,0}$ به این معنی خواهد بود که

$$Z(s,0)=1, \tag{۱۰۵}$$

و در نتیجه

$$Z(s,t)=e^{\left(\mu s+\lambda s^{-1}-\mu-\lambda\right)t}. \tag{۱۰۶}$$

با بسط این تابع مولد بر حسب توان های مثبت و منفی s می توان تابع احتمال را برای همه زمان ها بدست آورد. می نویسیم:

$$Z(s,t)=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\mu)^k}{k!}s^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^l}{l!}s^{-l} \tag{۱۰۷}$$

به دلیل وجود $l!$ و $k!$ در مخرج کسرها می توان حدود انتگرال را از $-\infty$ تا ∞ گرفت، (دلیل اش این است که فاکتوریل یک عدد صحیح منفی همواره برابر با بی نهایت است.) در نتیجه:

$$Z(s,t)=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\mu^k\lambda^l}{k!l!}s^{k-l}t^{k+l}. \tag{۱۰۸}$$

قرار می دهیم $x:=k-l$ و در نتیجه

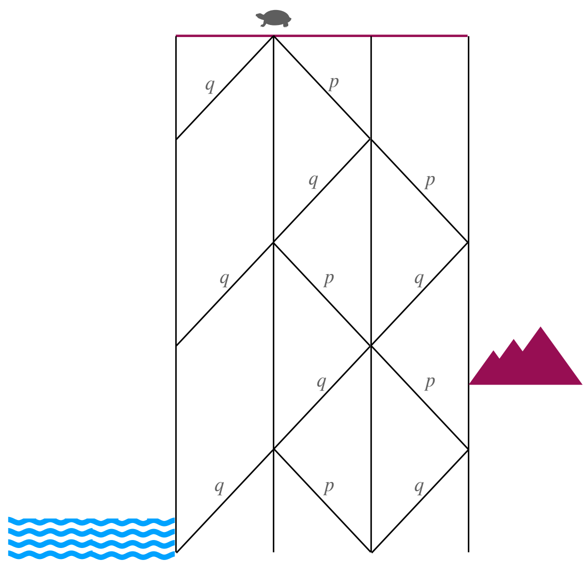
$$Z(s,t)=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu^k\lambda^{k-x}}{k!(k-x)!}s^x t^{k+l}. \tag{۱۰۹}$$

از این رابطه تابع توزیع احتمال بدست می آید:

$$P(x,t)=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu^k\lambda^{k-x}}{k!(k-x)!}t^{2k-x}. \tag{۱۱۰}$$

به عنوان مثال، احتمال باقی بودن در مبدا مختصات بر حسب زمان برابر است با:

$$P(0,t)=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mu^k\lambda^k}{k!(k)!}t^{2k}. \tag{۱۱۱}$$



شکل ۳: یک لاک پشت در یک مزرعه کوچک زندگی می کند که یک طرف آن یک دره و طرف دیگرش یک پرتگاه است. لاک پشت با احتمالات نشان داده شده در این شکل به طرف دره یا پرتگاه قدم بر می دارد. می خواهیم بفهمم احتمال این که لاک پشت نهایتا به دریا سقوط کند چقدر است؟ احتمال اینکه به دره سقوط کند چقدر است؟

۷ ولگشت با دیواره های جذب کننده

شکل (۳) یک نمونه از مسایل ولگشت را نشان می دهد که در آن دیواره های جاذب وجود دارد. یک لاک پشت در مزرعه کوچکی زندگی می کند که یک طرف اش دریا و طرف دیگرش یک دره است. توجه کنید که کل مزرعه بسیار کوچک است به این معنا که طول آن تنها سه قدم است. سوالی که می پرسیم این است که احتمال این که لاک پشت به دریا سقوط کند چقدر است؟ احتمال اینکه به دره سقوط کند چقدر است؟ چقدر احتمال دارد که هم چنان در مزرعه به زندگی خود ادامه دهد. شکل (۳) به صورت شماتیک مسیرهای گوناگون را نشان می دهد و احتمالات قدم های هر مسیر را نشان می دهد. اگر احتمال سقوط به دریا را با P_S و احتمال سقوط به دره را با P_V نشان دهیم، با نگاه به شکل به سادگی می توانیم این احتمالات را حساب کنیم. با نگاه به شکل بدست می آوریم:

$$P_S = q + pq^2 + p^2q^3 + \cdots = q(1 + pq + (pq)^2 + \cdots) = \frac{q}{1-pq}. \quad (۱۱۲)$$

هم چنین بدست می آوریم:

$$P_W = p^2 + (pq)p^2 + (pq)^2p^2 + \cdots = \frac{p^2}{1-pq}. \quad (۱۱۳)$$

آیا این احتمال وجود دارد که لاک پشت همین طور بین دره و دریا پرسه بزند و درون هیچکدام سقوط نکند؟ برای این کار باید احتمال زیر را حساب کنیم، آنهم با توجه به اینکه $p+q=1$ است:

$$P_W + P_S = \frac{p^2+q}{1-pq} = \frac{p^2+1-p}{1-p(1-p)} = 1. \quad (۱۱۴)$$

معنایش این ا ست که نهایتا لاک پشت نمی تواند جان سالم به در ببرد.

حال بیایید این مسئله را برای یک مزرعه بزرگ تر حل کنیم. تصور کنیم که طول مزرعه L قدم است و در ابتدا لاک پشت در نقطه n ام ایستاده است. دریا در نقطه 0 و دره در نقطه L قرار دارد. مسلم است که در این حالت نمی توان از روش قبلی برای حل این مسئله استفاده کرد زیرا این کار به معنای جمع کردن سری های بسیار بزرگ و پیچیده است. به جای آن سعی می کنیم از یک روش تکرار [۷] استفاده کنیم. با همان تعاریف قبلی دو کمیتِ $P_S(n)$ و $P_V(n)$ را به کار می بریم. این کمیت ها به طور طبیعی بستگی به موقعیت اولیه لاک پشت دارند. حال بسته به این که لاک پشت قدم اول را به چه سمتی بردارد می توانیم یک معادله تکرار برای $P_V(n)$ بنویسیم: براحتی می توانیم خود را قانع کنیم که این رابطه تکرار صحیح است:

$$P_V(n) = qP_V(n-1) + pP_V(n+1). \quad (۱۱۵)$$

این گونه معادلات تکرار را می توان به شکل زیر حل کرد. قرار می دهیم:

$$P_V(n) = A\lambda^n \quad (۱۱۶)$$

که در آن A یک ضریب ثابت و α پارامتری است که باید تعیین شود. جایگذاری در معادله تکرار نتیجه می دهد:

$$1 = q\lambda^{-1} + p\lambda \qquad \longrightarrow \qquad p\lambda^2 - \lambda + q = 0 \quad (۱۱۷)$$

که از حل آن بدست می آوریم:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2p}. \quad (۱۱۸)$$

[۷] Recursion Method

از آنجا که برای این پارامتر دو جواب بدست آوردیم، جواب نهایی به صورت زیر است:

$$P_V(n) = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n. \tag{۱۱۹}$$

ضرایب A و B می بایست از شرایط مرزی تعیین شوند. خواننده می تواند خود را قانع کند که:

$$P_V(L) = 1, \quad P_V(0) = 0. \tag{۱۲۰}$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$P_V(n) = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^L - \lambda_2^L}. \tag{۱۲۱}$$

برای پیدا کردن $P_S(n)$ کافی است در این رابطه آخری تغییرات مناسب را اعمال کنیم. بدست می آوریم:

$$P_S(n) = \frac{\lambda_1^{L-n} - \lambda_2^{L-n}}{\lambda_1^L - \lambda_2^L}. \tag{۱۲۲}$$

- **تمرین:** تمرین قبلی را برای وقتی که $p = q = \frac{1}{2}$ است حل کنید. سپس برای این حالت احتمال زنده ماندن لاک پشت را حساب کنید.

- **تمرین:** قمار بازی به یک کازینو می رود. سرمایه اولیه او ۱۰۰ دلار است. او وارد یک بازی می شود که احتمال بردن یک دلار برای او برابر است با $\frac{1}{3}$ و احتمال باختن یک دلار برای او برابر با $\frac{2}{3}$ است. او تا وقتی بازی می کند که سرمایه اش به ۲۰۰۰ دلار برسد سپس بازی را خاتمه می دهد و به خانه بر می گردد. حساب کنید احتمال اینکه او تمام پول خود را ببازد چقدر است؟ احتمال اینکه او با ۲۰۰۰ دلار به خانه برگردد چقدر است؟ اگر وقتی سرمایه اش به ۲۰۰ دلار رسید بازی را خاتمه دهد، احتمالات فوق چقدر است؟

- **تمرین:** مسئله قبلی را برای وقتی که حل کنید که این شخص به یک کازینوی منصف می رود. در این کازینو احتمال برد و باخت یک دلار با هم مساوی است.

۸ ولگشت در دو بعد

به همین شکل می توانیم ولگشت در دو بعد و سه بعد را بررسی کنیم. برای سادگی ولگشت دو بعدی را در نظر می گیریم. شبکه دو بعدی دارای بردارهای یکه $\hat{x}$ و $\mathbf{y}$ است و طول شبکه نیز برابر با یک است. ذره با نرخ های احتمال R, L, U, D به راست، چپ، بالا و پایین می رود. معادله تحول مارکوفی به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t) = RP(\mathbf{r}-\hat{x},t) + LP(\mathbf{r}+\hat{x},t) + UP(\mathbf{r}-\hat{y},t) + DP(\mathbf{r}+\hat{y},t)_{(}R+L+U+D)P(\mathbf{r},t). \qquad (۱۲۳)$$

برای این ولگشت تابع مولد به شکل زیر تعریف می شود:

$$Z(u,v) := \sum_{x,y} u^x v^y P(\mathbf{r},t). \qquad (۱۲۴)$$

معادله حاکم بر این تابع برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(u,v,t) = \left[(Ru + Lu^{-1} + Uv + Dv^{-1}) - (R+L+U+D)\right] \qquad (۱۲۵)$$

و در نتیجه

$$Z(u,v,t) = e^{\left[(Ru+Lu^{-1}+Uv+Dv^{-1})-(R+L+U+D)\right]t}. \qquad (۱۲۶)$$

از این تابع مولد می توان هر نوع اطلاعات مفید دیگری را استخراج کرد.

■ **تمرین:** یک ولگشت یک بعدی را روی یک شبکه یک بعدی که از دو طرف تا بی نهایت گسترده است در نظر بگیرید. احتمال قدم ها روی خانه های زوج و فرد باهم متفاوت است. این احتمالات برابرند با:

$$\begin{aligned} &P(2n \longrightarrow 2n+1) = p, \qquad && P(2n \longrightarrow 2n-1) = q \\ &P(2n+1 \longrightarrow 2n+2) = q, \qquad && P(2n+1 \longrightarrow 2n) = p. \end{aligned} \qquad (۱۲۷)$$

نخست معادله مارکوف را برای این ولگشت بنویسید. سپس با استفاده از تابع مولد آن را به طور کامل حل کنید و توابع زیر را بدست آورید:

$$P_t(2x), \qquad P_t(2x+1). \qquad (۱۲۸)$$

زمان را گسسته در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم $p = 2/3, \quad q = 1/3$ از هر راهی که فکر می کنید ساده تر است ، احتمالات زیر را حساب کنید:

$$P_2(2x), \qquad P_2(2x+1).$$

■ **تمرین:**

یک ولگشت یک بعدی را روی یک شبکه یک بعدی که از دو طرف تا بی نهایت گسترده است در نظر بگیرید. احتمال قدم ها روی خانه های زوج و فرد باهم متفاوت است. این احتمالات برابرند با:

$$P(2n \longrightarrow 2n+1) = p, \qquad P(2n \longrightarrow 2n) = 1-p$$
$$P(2n+1 \longrightarrow 2n+2) = 1-q, \qquad P(2n+1 \longrightarrow 2n+1) = q. \tag{۱۲۹}$$

بقیه احتمالات صفر هستند. نخست معادله مارکوف را برای این ولگشت بنویسید. سپس برای حالتی که $p = q$ است، با استفاده از تابع مولد آن را به طور کامل حل کنید و توابع زیر را بدست آورید:

$$P_t(2x), \qquad P_t(2x+1). \tag{۱۳۰}$$

زمان را گسسته در نظر بگیرید.

۹ معادله پخش

ولگشتی که بررسی کردیم روی یک شبکه گسسته در یک بعد طرح شده بود.:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(n,t) = \mu P(n-1,t) + \lambda P(n+1,t) - (\mu+\lambda)P(n,t). \tag{۱۳۱}$$

هرگاه این فرایند را روی شبکه ای در نظر بگیریم که فاصله نقاط اش به سمت صفر میل کند، به معادله ای می رسیم که آن را معادله پخش [۸] می گویند. این معادله همان معادله ای است که رفتار بسیاری از پدیده ها مثل پخش شدن جوهر در آب یا پخش شدن ذرات دود در هوا را توصیف می کند. برای این کار قرار می دهیم:

$$x = n\epsilon, \qquad (n+1)\epsilon = x+\epsilon, \qquad (n-1)\epsilon = x-\epsilon, \qquad P(n,t) = \epsilon P(x,t) \tag{۱۳۲}$$

[۸] Diffusion Equation

در این جا $P(x,t)$ چگالی احتمال است. با این جایگزینی ها خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \mu\big[P(x,t) - \epsilon\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\big] + \lambda\big[P(x,t) + \epsilon\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\big] - (\mu+\lambda)P(x,t) \qquad (۱۳۳)$$

پس از ساده کردن بدست می آوریم

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -(\mu-\lambda)\epsilon\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\epsilon^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \qquad (۱۳۴)$$

با تعریفِ

$$v := (\mu-\lambda)\epsilon \qquad D := \epsilon^2(\lambda+\mu) \qquad (۱۳۵)$$

این معادله به شکل آشنای زیر در می آید که معادله پخش نامیده می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -v\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \qquad (۱۳۶)$$

این معادله نشان دهنده این است که تابع توزیع احتمال ذرات اولا با سرعت v به سمت راست می رود و ثانیا با ضریب D پخش می شود. می توانیم در دستگاهی که با سرعت v به سمت راست حرکت می کند، به تابع توزیع احتمال نگاه کنیم، یعنی قرار دهیم

$$x' = x - vt, \qquad t' = t \qquad (۱۳۷)$$

که در نتیجه آن

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}. \qquad (۱۳۸)$$

در دستگاه جدید معادله پخش به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial P}{\partial t'} = \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 P}{\partial x'^2}, \qquad (۱۳۹)$$

که تنها نشان دهنده پخش است. این معادله را با تبدیل فوریه به صورت زیر حل می کنیم. قرار می دهیم:

$$P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\tilde{P}(k,t)dk, \qquad \tilde{P}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}P(x,t)dx. \qquad (۱۴۰)$$

تبدیل فوریه در معادله زیر صدق می کند

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}(k,t) = -\frac{1}{2}Dk^2\tilde{P}(k,t) \qquad (۱۴۱)$$

که حل آن بسیار ساده است:

$$\tilde{P}(k,t) = e^{-\frac{1}{2}Dk^2t}\tilde{P}(k,0). \tag{۱۴۲}$$

برای شرایط اولیه $P(x,0)=\delta(x)$ خواهیم داشت:

$$\tilde{P}(k,0) = \frac{1}{2\pi} \tag{۱۴۳}$$

و در نتیجه

$$\tilde{P}(k,t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}Dk^2t} \tag{۱۴۴}$$

و در نتیجه

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-\frac{1}{2}Dk^2t}dk = \sqrt{\frac{2\pi}{D}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{Dt}}. \tag{۱۴۵}$$

در دستگاه مختصات اولیه که ساکن است، تابع توزیع به شکل زیر خواهد بود:

$$P(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi Dt}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-vt)^2}{Dt}}. \tag{۱۴۶}$$

■ **تمرین:** معادله ولگشت را در یک شبکه سه بعدی مکعبی در نظر بگیرید. فرض کنید که نرخ های احتمال ولگشت در سه جهت با هم متفاوت اند. حد پیوسته این ولگشت را به صورت یک معادله پخش بنویسید.

حرکت براوونی را نخستین بار گیاهشناس اسکاتلندی در سال ۱۸۲۷ موقع مشاهده گرده های گیاهی در یک مایع زیر میکروسکوپ کشف کرد. حرکت تصادفی این گرده ها در واقع ناشی از ضربات مداوم و تصادفی مولکولهای مایع به گرده گیاهی است. می توان آن را به ضربه های مداوم گروه بسیاری از مردم به توپ های بزرگ پلاستیکی در بعضی از جشن ها تشبیه کرد. این حرکت تصادفی یکی از اولین شواهد مستقیم برای وجود اتم هاست که توصیف نظری آن در ۱۹۰۵ توسط اینشتین داده شده است. وی توانست ضریب پخش این حرکت تصادفی را به ترتیب زیر به مشخصات دنیای میکروسکوپی ربط دهد:

$$D = \frac{RT}{N6\pi\eta a} \tag{۱۴۷}$$

در این نظریه D ضریب پخش، R ثابت جهانی گازها، T دما، N عدد آووگادرو، η ضریب وشکسانی مایع و a شعاع ذره براوونی است که به صورت یک کره فرض شده است.

۱۰ معادله لانژون

معادله لانژون حرکت تصادفی یک ذره را در یک محیط وشکسان توصیف می کند. در یک بعد این معادله شکل ساده زیر را دارد، می توان این معادله را به راحتی به ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v(t) + \frac{1}{m}\xi(t). \tag{۱۴۸}$$

در این رابطه $\xi(t)$ همان نیروی تصادفی است و $-\gamma v(t)$ نیز نیروی اصطکاک است که متناسب با سرعت و در جهت عکس آن است. رابطه سرعت و مکان هم مثل همیشه به صورت زیر است.

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \tag{۱۴۹}$$

برای نیروی تصادفی $\xi(t)$ می بایست فرض های معقول و منطقی ای را در نظر بگیریم. در یک محیط همسانگرد، متوسط این نیرو می بایست برابر با صفر باشد و هیچ جهتی بر جهت دیگر ترجیح داده نشود. هم چنین در نظر می گیریم که این نیرو در زمان های متفاوت به هم همبسته نیست و هر نیرو در هر لحظه مستقل از لحظه بعد عمل می کند. بنابراین

$$\langle \xi(t)\rangle = 0, \qquad \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = g\delta(t_1 - t_2). \tag{۱۵۰}$$

اگر بخواهیم نمادهای دقیق تری به کار ببریم می بایست این متوسط ها را به صورت $\langle\cdot\rangle_\xi$ بنویسیم به این معنا که این متوسط ها روی دفعات مختلف آزمایش محاسبه می شوند. معادله لانژون را می توان به آسانی حل کرد. نخست آن را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{\gamma}{m}t}v(t)\right) = \frac{\gamma}{m}e^{\frac{\gamma}{m}t}\xi(t) \tag{۱۵۱}$$

این معادله حل ساده زیر را دارد که در آن v_0 سرعت در لحظه صفر است.

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{1}{m}\int_0^t d\tau e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau)}\xi(\tau) \tag{۱۵۲}$$

با یک بار دیگر انتگرال گیری از این معادله می توانیم مختصه ذره را بدست آوریم:

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{\gamma}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})v_0 + \frac{1}{\gamma}\int_0^t d\tau(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau)})\xi(\tau), \tag{۱۵۳}$$

که در آن x_0 مختصه ذره در لحظه صفر است. این عبارت ها سرعت و مکان ذره را در یک بار آزمایش و بر اساس یک تابع زمانی مشخص از $\xi(t)$ بدست می دهند. با انجام بارها آزمایش می بایست روی ξ متوسط گرفت. در این صورت بدست می آوریم:

$$\langle v(t)\rangle = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{۱۵۴}$$

رابطه اول بیان می کند که سرعت متوسط ذره در زمان های بزرگ نهایت به سمت صفر میل می کند. این البته به این معنا نیست که در یک بار آزمایش ذره متوقف می شود، بلکه به این معناست که در زمان های بی نهایت سرعت ذره یک جهت کاملا تصادفی اختیار می کند و به همین دلیل متوسط آن صفر است. این که نهایتا اندازه این سرعت به طور متوسط چقدر خواهد شد سوالی است که پاسخ آن بزودی معلوم خواهد شد. قبل از آن می توانیم بفهمیم که متوسط جابجایی ذره چقدر است. براحتی بدست می آوریم:

$$\langle x(t) - x_0 \rangle = \frac{m}{\gamma} v_0 (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}). \tag{۱۵۵}$$

این رابطه بیان می کند که در زمان بی نهایت میزان جابجایی ذره به طور متوسط برابر است با $\frac{m}{\gamma}v_0$. نخست دقت می کنیم که این جابجایی متناسب با سرعت اولیه است به این معنا که هر جهتی که سرعت اولیه داشته باشد، جابجایی نیز نهایتا در همان جهت صورت خواهد گرفت. علاوه بر آن میزان جابجایی متناسب با ضریب $\frac{m}{\gamma}$ است که در واقع مقابله اینرسی ذره را با نیروی بازدارنده اصطکاک نشان می دهد. حال به سراغ همبستگی سرعت ها می رویم. با ضرب کردن عبارتی که برای سرعت ها بدست آوردیم در دو زمان متوسط و سپس محاسبه متوسط و استفاده از رابطه $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = g\delta(t_1 - t_2)$ بدست می آوریم:

$$\langle v(t_2)v(t_1) \rangle = v_0^2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2+t_1)} + + \frac{g}{m^2} \int_0^{t_2} d\tau_2 \int_0^{t_1} d\tau_1 \delta(\tau_2 - \tau_1) e^{\frac{\gamma}{m}(\tau_1 - t_1)} e^{\frac{\gamma}{m}(\tau_2 - t_2)} \tag{۱۵۶}$$

با محاسبه انتگرال این عبارت به شکل زیر ساده می شود.

$$\langle v(t_2)v(t_1) \rangle = \left(v_0^2 - \frac{g}{2m\gamma} \right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2+t_1)} + \frac{g}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2-t_1)}. \tag{۱۵۷}$$

تا کنون چیزی در باره مقدار پارامتر g نگفته ایم. این پارامتر در واقع ناشی از نیروی تصادفی است که اتم ها به ذره براونی وارد می کنند. در این مرحله می توانیم با کمک گرفتن از آنچه که از مکانیک آماری تعادلی می دانیم، مقدار این پارامتر را تعیین کنیم. عبارت بالا برای همبستگی سرعت ها در دو زمان مختلف را در نظر می گیریم. این عبارت برای یک سرعت اولیه معین از ذره براونی یعنی v_0 است. اگر سرعت اولیه تغییر کند، این عبارت هم تغییر می کند. اگر روی این سرعت متوسط بگیریم و متوسط را با $\langle \cdot \rangle_T$ نشان دهیم، عبارت بالا به شکل زیر در می آید:

$$\langle \langle v(t_2)v(t_1) \rangle \rangle_T = \left(\langle v_0^2 \rangle_T - \frac{g}{2m\gamma} \right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2+t_1)} + \frac{g}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2-t_1)}. \tag{۱۵۸}$$

اگر ذره براوونی با مایع به حال تعادل رسیده باشد، می بایست این تابع همبستگی شکلی پایا [۹] داشته باشد به این معنا که تنها تابعی از تفاوت زمان ها باشد. در این صورت می بایست داشته باشیم:

$$\langle v_0^2 \rangle_T = \frac{g}{2m\gamma}. \tag{۱۵۹}$$

اما از قضیه همپاری انرژی می دانیم که

$$\frac{1}{2}m\langle v_0^2 \rangle_T = \frac{1}{2}kT. \tag{۱۶۰}$$

بنابراین به دست می آوریم:

$$g = 2\gamma k_B T. \tag{۱۶۱}$$

با جایگذاری این پارامتر در معادله (۱۵۸) به عبارت نهایی زیر می رسیم:

$$\langle\langle v(t_2)v(t_1)\rangle\rangle_T = \frac{k_B T}{m} e^{-\frac{\gamma}{m}(t_2-t_1)}. \tag{۱۶۲}$$

تمرین:

الف: کمیت $\langle (x(t)-x_0)^2 \rangle$ را محاسبه کنید.

ب: با فرض

$$\langle v_0 \rangle_T = \langle x_0 \rangle_T = \langle v_0 x_0 \rangle_T = 0$$

متوسط میزان جابجایی ذره را بر حسب زمان بدست آورید و نشان دهید که برابر با عبارت زیر است:

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{m^2}{\gamma^2}\left(v_0^2 - \frac{g}{2m\gamma}\right)(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t})^2 + \frac{g}{\gamma^2}\left[t - \frac{m}{\gamma}(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t})\right] \tag{۱۶۳}$$

همچنین نشان دهید که:

$$\ll v(t_2)v(t_1) \gg = \frac{k_B T}{m} e^{-\frac{\gamma}{m}|t_2-t_1|} \tag{۱۶۴}$$

$$\ll x(t) \gg = \frac{2kT}{\gamma}\left[t - \frac{m}{\gamma}(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t})\right] \tag{۱۶۵}$$

[۹] Stationary

$$\ll x(t)^2 \gg = \frac{2kT}{\gamma} t \tag{۱۶۶}$$

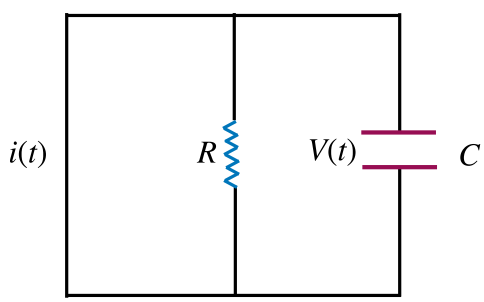
■ **تمرین:** یک مدار الکتریکی ساده مطابق با شکل (۴) در نظر بگیرید. جریان الکتریکی در این مدار و به تبع آن ولتاژ دو سر خازن کمیت های تصادفی هستند. دلیل اش هم این است که الکترون های درون سیم ها حرکت براونی انجام می دهند و در واقع دلیل عمده نوفه در مدارهای الکتریکی نیز همین حرکت براوونی الکترون هاست. می توانیم فرض کنیم که

$$\langle i(t)\rangle = 0, \qquad \langle i(t+\tau)i(t)\rangle = g\delta(\tau). \tag{۱۶۷}$$

با توجه به این مقادیر و با حل کردن معادله مدار کمیت $\langle V(t)\rangle$ را حساب کنید. نشان دهید که ولتاژ دو سر خازن در رابطه زیر صدق می کند:

$$\langle V(t_2)V(t_1)\rangle = \big(V(0)^2 - \frac{gR}{2C}\big)e^{-\frac{t_2+t_1}{RC}} + \frac{gR}{2C}e^{-\frac{|t_2-t_1|}{RC}}. \tag{۱۶۸}$$

سپس نشان دهید که اگر این سیستم در دمای T در حال تعادل گرمایی باشد، آنگاه روابط زیر برقرار خواهند بود:



شکل ۴: یک مدار RC که جریان آن دارای نوفه است.

$$\ll i(t_2)i(t_1) \gg_T = 2k_BTG\delta(t_2-t_1), \qquad V(t_2)V(t_1) \gg_T = \frac{k_BT}{C}e^{-\frac{|t_2-t_1|}{RC}} \tag{۱۶۹}$$

۱۱ دینامیک جمعیت

آنچه که در باره فرایندهای مارکوفی آموخته ایم برای مطالعه پدیده های بسیاری به کار می آید. یکی از جالب ترین این پدیده ها دینامیک جمعیت است، در جوامع انسانی، در جوامع حیوانات در مزارع و کشتزارها و بالاخره در کلونی باکتری ها و ویروس ها. در این بخش چند مثال از این نوع پدیده ها را بررسی می کنیم.

- مثال یک: گونه ای از جمعیت مثلا خرگوش ها را در نظر بگیرید که در یک جزیره زندگی می کنند. اگر نرخ زاد و ولد خرگوش ها را با α و جعیت خرگوش ها را با x نشان دهیم و هم چنین اگر از افت و خیز حجمعیت و تصادفی بودن آن صرف نظر کنیم، می توان یک معادله خیلی ساده برای تغییرات جمعیت خرگوش ها نوشت:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x. \qquad (۱۷۰)$$

چنین معادله ای حل نمایی دارد یعنی

$$x(t) = x(0)e^{\alpha t} \qquad (۱۷۱)$$

که طبیعتا غیرواقعی است زیرا به این معناست که خیلی زود یک انفجار جمعیت در خرگوش ها رخ خواهد داد. قبل از اینکه به اصلاح این مدل ساده بپردازیم کمی بیشتر در باره این معادله فکر کنیم. می توان گفت که $x(t)$ متوسط جمعیت خرگوش ها در زمان t است، یعنی $x(t) = \langle X(t)\rangle$. در واقع اگر احتمال اینکه جمعیت خرگوش ها در زمان t x بوده باشد را با $P(x,t)$ نشان دهیم، معادله فرایند تغییر جمعیت برای خرگوش ها چنین چیزی است:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \alpha(x-1)P(x-1,t) - \alpha x P(x,t). \qquad (۱۷۲)$$

جمله اول در واقع نشان دهنده این است که جمعیت خرگوش ها در یک لحظه $x-1$ است و با نرخ α به ازای هر خرگوش به این جمعیت اضافه می شود و جمعیت به x می رسد. جمله دوم نیز به این معناست که با نرخ α به ازا ی هر خرگوش نوزادی متولد می شود و جمعیت خرگوش ها از x به $x+1$ تبدیل می شود. در واقع از همین معادله می توان دریافت که

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle X(t)\rangle = \alpha\langle X(t)\rangle. \qquad (۱۷۳)$$

که با توجه به $x(t) = \langle X(t)\rangle$ همان رابطه ای است که قبلا بدست آورده بودیم. اما چرا این مدل غیرواقعی است؟ دلیل اش این است که منجر به انفجار جمعیت می شود؟ چرا انفجار جمعیت غیرواقعی است؟ به این دلیل که وقتی جمعیت خرگوش ها زیاد می شود غذای

کمتری (هویج کمتری در مزارع) به هر خرگوش می رسد و همین مسئله باعث رشد مرگ و میر و کاهش نرخ زاد و والد آنها می شود که در معادله تحول مارکوفی یا حتی همان معادله ساده اولیه به آن توجهی نشده است. یک راه ساده برای اصلاح این فرایند تحول این است که قرار دهیم:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \alpha x(t)(N - \alpha x(t)). \tag{۱۷۴}$$

فعلا به معادله تحول مارکوفی توجه نداریم و همین معادله ساده را در نظر داریم. در این معادله محدویت های محیطی (مثل کمبود غذا، رقابت، جفت و نظایر آن) به نوعی در نظر گرفته شده است. این معادله در واقع می گوید که اگر جمعیت آنها از N بیشتر شود، آنگاه نرخ جمعیت منفی خواهد بود. چنین معادله ای را چگونه حل می کنیم؟ قرار می دهیم

$$\frac{dx}{x(N-x)} = \alpha dt \tag{۱۷۵}$$

که حل آن خواهد بود

$$\frac{x}{N-x} = Ke^{N\alpha t} \tag{۱۷۶}$$

و یا

$$x(t) = \frac{kNe^{N\alpha t}}{1+ke^{N\alpha t}}. \tag{۱۷۷}$$

در لحظه صفر داریم

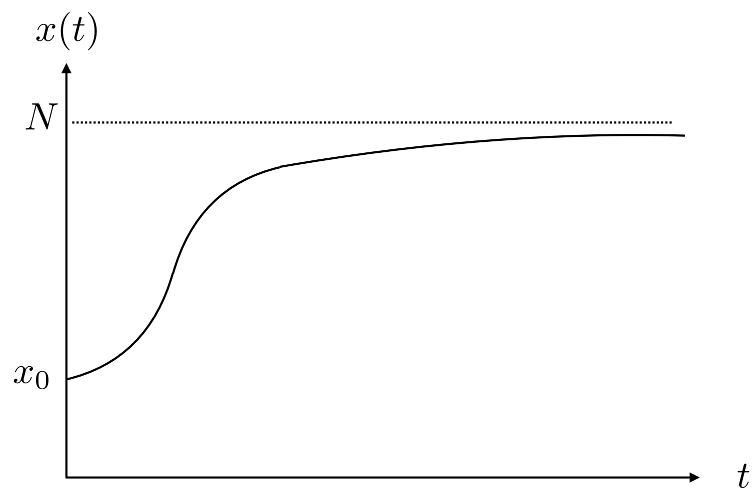
$$\frac{x_0}{N-x_0} = k \tag{۱۷۸}$$

و در نتیجه

$$x(t) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N-x_0)e^{-N\alpha t}}. \tag{۱۷۹}$$

شکل (۵) جمعیت خرگوش ها را بر حسب زمان نشان می دهد.

بنابراین در روزهای اولیه که جمعیت خرگوش ها با جمعیت آستانه یعنی N خیلی تفاوت دارد، محدودیت منابع طبیعی هنوز آشکار نشده و رشد تعداد خرگوش ها نمایی است. ولی با افزایش جمعیت، اثرات محدود بودن منابع طبیعی آشکار می شود و سرانجام جمعیت خرگوش ها در مقدار N به اشباع می رسد.



شکل ۵: رشد جمعیت خرگوش ها وقتی که منابع طبیعی محدود است.

- مدل لوتکا_ولترا: [۱۰] کمتر مزرعه ای را می توان یافت که فقط خرگوش داشته باشد. اگر در مزرعه خرگوش هست حتما روباه هم که به شکار خرگوش علاقه دارد در مزرعه یافت می شود. مدل لوتکا ـ ولترا مدلی است که برای مطالعه جمعیت خرگوش و روباه در این مزرعه یا به طور کلی برای مطالعه دو گونه زیستی که روی هم اثر می گذارند ابداع شده. جمعیت خرگوش ها را با x و جمعیت روباه ها را با y نشان می دهیم. در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} &= -y(\gamma - \delta x). \end{aligned} \tag{۱۸۰}$$

معنای این معادله ها این است: خرگوش ها با نرخ α زادوولد می کنند ولی با نرخ β توسط روباه ها شکارمی شوند. طبیعی است که این نرخ بستگی به جمعیت روباه ها هم دارد. از طرفی جمعیت روباه ها با نرخ δ به دلیل شکار و خوردن خرگوش ها زیاد می شود ولی با نرخ γ کم می شود به همان دلیلی که در مثال قبلی گفتیم یعنی کمبود منابع به طور کلی برای روباه ها. باقی می ماند حل ریاضی این دو معادله.

[۱۰] Lotk-Volterra

نخست به حالت پایای این معادلات توجه می کنیم یعنی به وقتی که تغییر زمانی وجود ندارد. این معادلات دو نقطه ثابت [۱۱] دارند. یکی

$$P_0 := (x, y) = (0, 0) \tag{۱۸۱}$$

که در واقع معنایش این است که در مزرعه نه خرگوشی هست نه روباهی و بنابراین نه زاد و ولدی خواهد بود و نه شکاری. جمعیت خرگوش و روباه همیشه صفر باقی می ماند.

دومین نقطه ثابت این است:

$$P_1 := (x, y) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}). \tag{۱۸۲}$$

■ تمرین: از نظر فیزیکی این نقطه ثابت و بستگی آن را به پارامترهای چهارگانه توجیه کنید.

می توانیم به اطراف این نقطه ثابت نگاه کنیم. قرار می دهیم

$$x(t) = \frac{\gamma}{\delta} + X(t) \qquad y(t) = \frac{\alpha}{\beta} + Y(t). \tag{۱۸۳}$$

در این صورت با صرف نظر کردن از جملات مرتبه دو به معادله های زیر می رسیم:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}Y(t), \qquad \frac{dY(t)}{dt} = \frac{\alpha\delta}{\beta}X(t). \tag{۱۸۴}$$

این دو معادله حل های نوسانی دارند به این ترتیب که از دو معادله بالا بدست می آوریم:

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -\omega^2 X, \qquad \frac{d^2Y(t)}{dt^2} = -\omega^2 Y, \qquad \omega = \sqrt{\alpha\gamma} \tag{۱۸۵}$$

و در نتیجه

$$X(t) = X(0)\cos\omega t \qquad Y(t) = Y(0)\sin\omega t. \tag{۱۸۶}$$

این رابطه ها نشان می دهند که جمعیت خرگوش ها و روباه ها به صورت تناوبی حول نقطه ثابت کم و زیاد می شود.

■ تمرین: به طور شهودی توضیح دهید که دلیل این رفتار تناوبی چیست؟

[۱۱] fixed point

۱.۱۱ رشد جمعیت به عنوان یک فرایند مارکوف

در بخش پیشین تغییرات جمعیت خرگوش ها در یک مزرعه را به صورت یک سیستم دینامیکی و تعینی در نظر گرفتیم. در آن معادلات هیچ احتمالی در کار نبود. جمعیت خرگوش ها به صورت معین و قطعی و با نرخ ثابتی تغییر می کرد. اما می دانیم که در دنیای واقعی این چنین نیست. ممکن است یک خرگوش امروز زاد و ولد کند و طبیعتا تا چندین ماه زاد و ولد نکند. ممکن است امروز خرگوشی شکار روباه شود یا اینکه تا چندین ماه دیگر نیز زنده بماند. بنابراین برا ای این که تصویر درستی از چگونگی رشد جمعیت خرگوش ها داشته باشیم می بایست به این پدیده به صورت یک پدیده مارکوفی نگاه کنیم. پدیده ای که در آن شانس و تصادف و احتمال وجود دارد. پارامترهای اصلی ای که باید تعریف کنیم این ها هستند:

یک ـ $P(n,t)$ یعنی احتمال اینکه در زمان t تعداد خرگوش ها در مزرعه برابر با n باشد.

دو ـ $b(n,t)$ یعنی احتمال اینکه در فاصله زمانی $(t,t+dt)$ یک خرگوش متولد شود و جمعیت خرگوش ها از n به $n+1$ تغییر یابد.

سه‌ـ $d(n,t)$ یعنی احتمال اینکه در فاصله زمانی $(t,t+dt)$ یک خرگوش بمیرد و جمعیت خرگوش ها از n به $n-1$ تغییر یابد. فرض ما این است که فاصله زمانی dt انقدر کوچک است که احتمال تولد یا مرگ بیش از یک خرگوش در این فاصله زمانی صفر است. با این حساب معادل تحول مارکوفی برابر می شود با:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(n,t)=b(n-1,t)P(n-1,t)+d(n+1,t)P(n+1,t)-(b(n,t)+d(n,t))P(n,t). \qquad (۱۸۷)$$

در فرایند خطی زاد و ولد، فرض می کنیم که نرخ مرگ و میر و زاد و ولد با جمعیت خرگوش ها در هر لحظه رابطه مستقیم دارد به این معنا که

$$b(n,t)=\beta n \qquad d(n,t)=\gamma n, \qquad (۱۸۸)$$

در نتیجه معادله تحول مارکوفی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(n,t)=\beta(n-1)P(n-1,t)+\gamma(n+1)P(n+1,t)-(\beta+\gamma)nP(n,t). \qquad (۱۸۹)$$

برای حل این معادله بازهم یک تابع مولد تعریف می کنیم:

$$Z(s,t):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{sn}P(n,t) \qquad P(n<0,t)=0. \qquad (۱۹۰)$$

در نتیجه تابع مولد در رابطه زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(s,t) = \beta e^{s}\sum_{n} e^{sn} nP(n,t) + \gamma e^{-s}\sum_{n} e^{sn} nP(n,t) - (\beta+\gamma)\sum_{n} ne^{sn}P(n,t). \quad (۱۹۱)$$

حال به این نکته دقت می کنیم که

$$\sum_{n} e^{ns} nP(n,t) = \frac{\partial}{\partial s}Z(s,t) \quad (۱۹۲)$$

در نتیجه معادله (۱۹۱) به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(s,t) = \left[\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - (\beta+\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial s}Z(s,t). \quad (۱۹۳)$$

این معادله را می توان به روش مشخصه ها [۱۲] حل کنیم. در این روش به دنبال منحنی هایی در صفحه (s,t) هستیم که تابع $Z(s,t)$ در آن ها مقدارثابتی داشته باشد. پیدا کردن این منحنی ها اطلاعات باارزشی در باره تابع $Z(s,t)$ در اختیار ما قرار خواهد داد و چه بسا به همین شیوه تابع $Z(s,t)$ به فرم بسته ای یافته شود. یک چنین منحنی ای را در نظر بگیرید. در امتداد این منحنی داریم

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial s}ds = 0. \quad (۱۹۴)$$

با استفاده از معادله (۱۹۳) می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial Z}{\partial s}ds + K(s)\frac{\partial Z}{\partial s}dt = 0, \quad (۱۹۵)$$

که در آن

$$K(s) = \beta e^{s} + \gamma e^{-s} - (\beta+\gamma). \quad (۱۹۶)$$

بنابراین روی این منحنی ها رابطه

$$ds + K(s)dt = 0 \quad (۱۹۷)$$

برقرار است. معادله اخیر را براحتی می توان حل کرد:

$$dt = -\frac{ds}{K(s)} = -\frac{ds}{\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - \beta - \gamma}. \quad (۱۹۸)$$

---

[۱۲] Method of Characteristics

که از آن نتیجه می گیریم:

$$t = -\int \frac{ds}{\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - \beta - \gamma} \tag{۱۹۹}$$

با تغییر متغیر $u = e^{s}$ و کمی محاسبه

$$t = -\int \frac{du}{\beta u^2 - (\beta+\gamma)u + \gamma} = -\frac{1}{\beta-\gamma}\int \big[\frac{du}{u-1} - \frac{du}{u-\frac{\gamma}{\beta}}\big] \tag{۲۰۰}$$

و سپس محاسبه انتگرال به نتیجه زیر می رسیم:

$$t = \frac{1}{\beta-\gamma}\ln\mid \frac{u-\frac{\gamma}{\beta}}{u-1}\mid + c. \tag{۲۰۱}$$

این معادله نشان دهنده یک دسته منحنی است که روی آنها Z مقدار ثابتی به خود می گیرد. پارامتر c روی هر منحنی مقدار ثابتی است. پس $Z(s,t)$ تنها تابعی از پارامتر c است. بنابراین می بایست این پارامتر را بر حسب t و s بدست بیاوریم:

$$c = t - \frac{1}{\beta-\gamma}\ln\mid \frac{u-\frac{\gamma}{\beta}}{u-1}\mid \tag{۲۰۲}$$

و در نتیجه

$$e^{c} = \frac{e^{t}}{\ln\mid \frac{u-\frac{\gamma}{\beta}}{u-1}\mid^{\frac{1}{\beta-\gamma}}}. \tag{۲۰۳}$$

پس از جایگذاری $u = e^{s}$ از همه اینها نتیجه ای که می گیریم این است که $Z(s,t)$ تنها تابعی از یک ترکیب خاص از s و t است، یعنی

$$Z(s,t) = f\big[e^{(\beta-\gamma)t}\mid \frac{e^{s}-1}{e^{s}-\frac{\gamma}{\beta}}\mid\big]. \tag{۲۰۴}$$

اما هنوز حل ما به پایان نرسیده است. شاید بتوانیم فرم تابع f را نیز پیدا کنیم. برای این کار به شرایط اولیه نگاه می کنیم. اگر جمعیت خرگوش ها در لحظه صفر برابر با N باشد، در این صورت داریم:

$$P(n,0) = \delta_{n,N} \quad \longrightarrow \quad Z(s,0) = e^{sN}. \tag{۲۰۵}$$

پس از رابطه (۲۰۴) می فهمیم که

$$e^{sN} = f\big[\mid \frac{e^{s}-1}{e^{s}-\frac{\gamma}{\beta}}\mid\big]. \tag{۲۰۶}$$

قرار می دهیم

$$y = \mid \frac{e^s - 1}{e^s - \frac{\gamma}{\beta}} \mid \qquad \longrightarrow \qquad f(y) = (\frac{1 - \frac{\gamma}{\beta} y}{1 - y})^N. \tag{۲۰۷}$$

به این ترتیب فرم تابع f را بدست آوردیم. بنابراین تابع $Z(s,t)$ چنین است:

$$Z(s,t) = (\frac{1 - \frac{\gamma}{\beta} y}{1 - y})^N \tag{۲۰۸}$$

که در آن به جای y می بایست عبارت $\mid \frac{e^s-1}{e^s-\frac{\gamma}{\beta}} \mid e^{(\beta-\gamma)t}$ را قرار دهیم. با جایگذاری این عبارت و و ساده کردن

$$Z(s,t) = \left[\frac{\beta e^s - \gamma - \gamma e^{(\beta-\gamma)t}(e^s - 1)}{\beta e^s - \gamma - e^{(\beta-\gamma)t}(e^s - 1)}\right]^N. \tag{۲۰۹}$$

از این رابطه می توان متوسط جمعیت خرگوش ها را در هر لحظه حساب کرد.

■ تمرین: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle N(t) \rangle \qquad\qquad \sigma_N(t).$$

۲.۱۱ فرایندهای شیمیایی

یک نمونه دیگر از فرایندهای رشد جمعیت مربوط به واکنش های شیمیایی است که با همین صورت بندی ای که در بخش پیشین توضیح دادیم می توان آن را مطالعه کرد. به عنوان مثال واکنش زیر را در نظر بگیرید:

$$A + X \underset{\mathrm{k_2}}{\overset{\mathrm{k_1}}{\rightleftarrows}} A + Y \tag{۲۱۰}$$

منظور از k_1 و k_2 نرخ های واکنش است به این معنا که وقتی یک مولکول A به یک مولکول X برخورد می کند، با احتمال $k_2 dt$ در زمان dt مولکول X تبدیل به مولکول Y می شود. همین تعبیر برای k_1 نیز به کار می رود. دقت کنید که تعداد مولکول های A ثابت است ولی تعداد مولکولهای X و Y با زمان تغییر می کند. کمیت مورد علاقه ما احتمال این است که در زمان t n_x تا مولکول از نوع X و n_y تا مولکول از نوع Y داشته باشیم. این کمیت را با $P(n_x, n_y, t)$ نشان می دهیم. در این صورت معادله تحول مارکوفی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(n_x, n_y, t) &= k_2 n_A (n_y + 1) P(n_x - 1, n_y + 1, t) + k_1 n_A (n_x + 1) P(n_x + 1, n_y - 1, t) \\ &- k_1 n_A n_x P(n_x, n_y, t) - k_2 n_A n_y P(n_x, n_y, t). \end{aligned} \tag{۲۱۱}$$

۱۲ مسئله ها:

■ **مسئله یک:** در واکنش شیمیایی

$$A + X \underset{\mathrm{k}_2}{\overset{\mathrm{k}_1}{\rightleftarrows}} A + Y \tag{۲۱۲}$$

از این استفاده کنید که $n_x + n_y = n$ مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت و هم چنین مقدار n_A را جزء داده های مسئله تلقی کنید. سپس معادله تحول مارکوفی را بازنویسی کنید و آن را به همان شیوه ای که مسئله خرگوش ها را حل کردیم به طور کامل حل کنید. یعنی تابع مولد را بدست آورید. سپس از روی تابع مولد کمیت های $\langle N_x(t)\rangle$ و $\langle N_y(t)\rangle$ را بدست آورید.

■ **مسئله دو:** مقداری ماده رادیواکتیو را در نظر بگیرید. در زمان t تعداد $n(t)$ تا هسته در این ماده وجود دارد که واپاشیده نشده اند. هرکدام از این هسته ها با نرخ احتمال λ واپاشیده می شود. یعنی در زمان dt با احتمال λdt یک هسته واپاشیده می شود. فرض کنید که در زمان $t = 0$ تعداد n_0 تا هسته سالم داشته باشیم.

الف: معادله فرایند مارکوفی را برای واپاشی این هسته ها بنویسید.

ب: تعداد متوسط هسته های سالم را بر حسب زمان بدست آورید.

پ: واریانس تعداد هسته های سالم را برحسب زمان بدست آورید.

ت: نیمه عمر این هسته ها را محاسبه کنید.

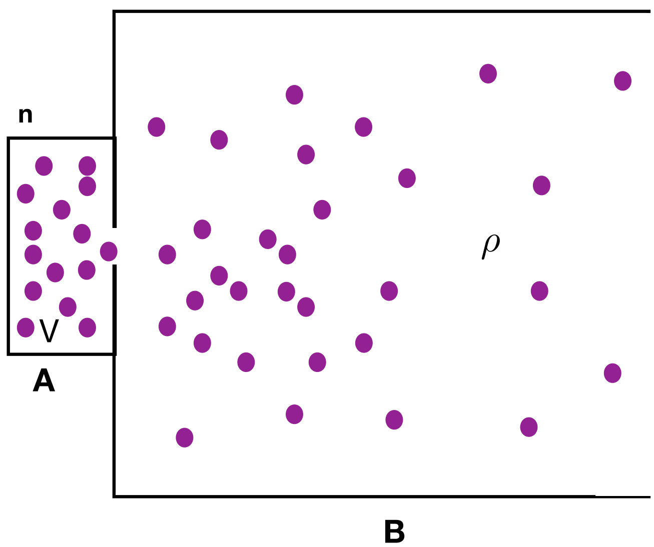
■ **مسئله سه:** شکل (۶) را در نظر بگیرید. جعبه A با حجم V به جعبه B با حجم بی نهایت متصل شده است. تعداد مولکوهای درون جعبه A

با n نشان می دهیم. احتمال اینکه در زمان dt یک ذره از جعبه A به جعبه B برود برابر است با $\frac{n}{V}dt$.

احتمال اینکه در همین فاصله زمانی یک ذره از جعبه B به جعبه A برود برابر است با ρdt که در آن ρ چگالی ذرات در جعبه B است و با زمان ثابت است.

الف: اگر در زمان $t = 0$ تعداد n_0 تا ذره در جعبه A وجود داشته باشد، احتمال این را پیدا کنید که در زمان t دارای n تا ذره باشد.

ب: کمیت های زیر را حساب کنید: $\langle n(t)\rangle$ و $\sigma_n(t)$.



شکل ۶: فرایند گریز ذرات از یک جعبه به فضای باز

- **مسئله چهار:** یک ذره براونی را به جرم m در نظر بگیرید که در یک بعد تحت اثر نیروی ثابت f_0 در مایعی با ضریب اصطکاک γ حرکت می کند. این ذره تحت تاثیر یک نیروی تصادفی $\xi(t)$ نیز هست که در شرایط $\langle\xi(t)\rangle = 0 \quad , \quad \langle\xi(t_2)\xi(t_1)\rangle = g\delta(t_2 - t_1)$ صدق می کند. فرض کنید که در لحظه صفر سرعت و مکان ذره به ترتیب برابر باشند با v_0 و x_0. برای این ذره توابع همبستگی زیر را حساب کنید:

$$\langle v(t_2)v(t_1)\rangle \qquad \langle x(t)^2\rangle.$$

- **مسئله پنج:** یک مسئله مرگ و میر را در یک گروه در نظر بگیرید که به آن مهاجرت هم اضافه شده است. فرض کنید که در زمان t جمعیت برابر با $n(t)$ باشد و در فاصله زمانی Δt احتمال ورود یک مهاجر به این گروه $\alpha\Delta t$ ، و احتمال تولد و مرگ به ترتیب برابر با $\beta n\Delta t$ و $\gamma n\Delta t$ باشد. اگر در زمان 0 جمعیت برابر با n_0 باشد.

الف: معادله مادر را برای $P(n,t)$ بنویسید و با استفاده از ان معادله حاکم بر تابع مولد را تعیین کنید.

ب: گشتاور اول یعنی $\langle n(t)\rangle$ و گشتاور دوم یعنی $\langle n^2(t)\rangle - \langle n(t)\rangle^2$ را بدست آورید.

■ **مسئله شش:** واکنش شیمیایی زیر را در نظر بگیرید

$$A + X \rightleftarrows A + Y$$

که در آن نرخ واکنش از چپ به راست برابر با k_1 و از راست به چپ برابر با k_2 است. در این واکنش مولکول A یک کاتالیزور است که غلظت آن نیز ثابت نگاه داشته می شود. فرض کنید که تعداد کل مجموع مولکول های X و Y ثابت و برابر با N است.

الف: معادله حاکم بر $P(n,t)$ که احتمال وجود n مولکول X در زمان t است را بنویسید. تابع مولد مربوطه را نیز حساب کنید.

ب- متوسط تعداد مولکول های از نوع X یعنی $\langle n(t)\rangle$ و واریانس آن را حساب کنید.

■ **مسئله شش:** واکنش شیمیایی طرح شده در مسئله پیشین را در نظر بگیرید. فرض کنید که $k_2 = 1$. $N = 3, k_1 = 2,$

الف: ماتریس انتقال H را برای این فرایند بنویسید و ویژه بردارهای چپ و راست آن را تعیین کنید.

ب- اگر در ابتدا تعداد صفر تا از مولکولهای X در این سیستم باشند، احتمال این که در زمان t تعداد مولکول ها n تا باشد چقدر است؟ احتمال این که در زمان $t \longrightarrow \infty$ تعداد مولکول ها n تا باشد چقدر است؟

■ **مسئله هفت:** واکنش شیمیایی زیر را در نظر بگیرید:

$$A + M \xrightarrow{k_1} X + M \quad 2X \xrightarrow{k_2} E + D, \tag{۲۱۳}$$

که در آن مولکولهای $A, M, E,$ و D از یک منبع بزرگ تهیه می شوند و تعداد آنها را می توان ثابت فرض کرد.

الف: احتمال این را پیدا کنید که در زمان $t \longrightarrow \infty$ تعداد n تا از مولکولهای X داشته باشیم.

ب: تعداد متوسط مولکول های X را در زمان های بسیار بزرگ پیدا کنید.

راهنمایی: از شرایط مرزی $F(1) = 1$ و $F(-1) = 0$ برای تابع مولد $F(z)$ استفاده کنید. تابع مولد را می توانید بر حسب توابع بسل تعمیم یافته بنویسید. هم چنین استفاده از تبدیل $F(z) = \sqrt{s}G(s)$ که در آن $s = \frac{1+z}{2}$ است ممکن است مفید باشد.

■ **مسئله اضافی : (انتخابی)** یک شبکه دوبعدی در نظر بگیرید که سلول های آن به صورت شش ضلعی های منتظم هستند. چنین شبکه

ای معمولا شبکه لانه زنبوری [13] خوانده می شود. در چنین شبکه ای معادله حاکم بر تابع احتمال را بنویسید. سپس معادله حاکم بر تابع مولد را بنویسید. لازم نیست این معادله را حل کنید. (راهنمایی: باید دقت کنید که دو نوع نقطه در این شبکه وجود دارد. این مسئله احتیاج به ابتکار دارد و چندان ساده نیست.)

۱۳ قدردانی

از آقای بهروز بنیادی که یک اشتباه محاسباتی را در متن پیشین این درسنامه به من یادآوری کردند تشکر می کنم.

[13] Honeycomb Lattice